

基于加权 Schatten p 范数最小化的 磁共振图像重构方法研究

蒋明峰¹, 陆 亮¹, 吴 龙¹, 徐文龙², 汪亚明¹

(1. 浙江理工大学信息学院, 浙江杭州 310018; 2. 中国计量大学生物医学工程系, 浙江杭州 310018)

摘 要: 本文提出了一种基于加权 Schatten p 范数最小化 (Weighted Schatten p-Norm Minimization, WSNM) 的磁共振图像重构算法, 该方法利用磁共振图像的非局部自相似性, 并结合 Schatten p 范数和不同秩元素重要性的加权因子, 实现磁共振图像重构过程的低秩约束. 此外, 采用交替方向乘子算法 (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) 来求解基于 WSNM 磁共振图像重构的非凸最小化问题. 实验结果表明, 相比于最近的磁共振重构算法, 基于 WSNM 的磁共振图像重构方法具有更好的重建效果, 可获得更高的峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 和更好的结构相似性 (Structural Similarity, SSIM).

关键词: 磁共振图像重构; 非局部自相似性; 加权 Schatten p 范数最小化

中图分类号: TP302 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2019)04-0784-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.04.003

The Research of MRI Reconstruction Method by Using Weighted Schatten P-Norm Minimization

JIANG Ming-feng¹, LU Liang¹, WU Long¹, XU Wen-long², WANG Ya-ming¹

(1. School of Information Science and Technology, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China;

2. Department of Biomedical Engineering, China Jiliang University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China)

Abstract: In this paper, the weighted Schatten p-norm minimization (WSNM) method is proposed to implement magnetic resonance imaging (MRI) reconstruction. The nonlocal self-similarity of magnetic resonance images, Schatten p-norm and the weighting factors of the importance of different rank elements are integrated together as the low rank constraint to regularize the MRI reconstruction. In addition, the Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) algorithm is used to solve the non-convex minimization problem of MRI reconstruction based WSNM. Compared with other state-of-the-art methods in numerical experiments, the proposed method achieves a higher reconstruction quality with higher peak signal to noise ratio (PSNR) and better structural similarity (SSIM) index.

Key words: magnetic resonance imaging (MRI) reconstruction; nonlocal self-similarity; weighted Schatten p-norm minimization

1 引言

磁共振成像 (Magnetic Resonance Imaging, MRI) 具有对身体检查无创, 无辐射的优点, 因而被广泛的运用在病理检查和临床诊断过程中. 在早中期的磁共振成像中, 设备扫描时间较长, 如一次心脏扫描需要大约数小时左右, 甚至更长时间, 这限制了磁共振成像的应用范围. 近年来, 基于压缩感知的磁共振成像^[1,2] (CS-MRI) 技术, 可以极大地减少 K 空间的采样数目, 从而缩

短对病人的扫描时间, 减少病人在扫描过程中所承担的痛苦. 压缩感知利用图像的可压缩性和稀疏性, 从很少的观测值中重建出没有混叠的图像. CS-MRI 重构问题可以表示成:

$$\min_x \frac{1}{2} \|Y - UFX\|_F^2 + \lambda \|\Psi X\|_1 \quad (1)$$

其中 $X \in \mathbb{C}^{\sqrt{N} \times \sqrt{N}}$ 为重建的 MR 图像; $F \in \mathbb{C}^{\sqrt{N} \times \sqrt{N}}$ 为离散傅里叶变换矩阵; $U \in \mathbb{R}^{\sqrt{M} \times \sqrt{N}}$ ($M < N$) 为欠采样矩阵; $Y \in \mathbb{C}^{\sqrt{M} \times \sqrt{N}}$ 是 K 空间中欠采样数据, Ψ 代表着稀疏变换 (例

收稿日期: 2018-05-02; 修回日期: 2018-11-16; 责任编辑: 李勇锋

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 61672466, No. 61672476); 浙江省自然科学基金 (No. LSZ19F010001, No. LZ15F020004); 浙江省科技厅公益项目 (No. 2015C31075); 浙江理工大学 521 人才培养计划

如离散余弦变换,小波变换,轮廓波变换^[3]等等);参数 λ 控制着图像稀疏性和数据保真度之间的平衡.

MR 图像的稀疏表示通常在 CS-MRI 重建中起着至关重要的作用,然而自然图像不能被任何的已知基(例如离散余弦基,小波基)精确地稀疏表示.为了寻求合适的基,自适应的字典学习被提出来,字典学习的目的就是所给的训练集中训练得到一个字典(基函数的集合),以便训练集中的元素可以用字典稀疏表示,其中 K-SVD^[4]作为经典的过完备字典学习算法,被广泛运用在图像去噪^[5]和重构^[6]中.尽管如此,由于字典学习的计算复杂性较大^[4,6],忽略了训练集元素之间的相邻关系^[7],因此它的应用仍受到限制.

最近,基于非局部自相似性(Nonlocal Self-Similarity, NSS)和低秩矩阵逼近的先验知识在图像处理方面取得了巨大的成功^[8-10].这些算法在对待非凸秩函数时,常用核范数代替求解,然而,为了追求凸性质,核范数不管值的大小都平等地对待每一个奇异值,限制了其在实际应用中的灵活性.为了改善核范数最小化(Nuclear Norm Minimization, NNM)的缺点,加权核范数最小化^[11](Weighted Nuclear Norm Minimization, WNNM)被提出使用权重来惩罚矩阵奇异值之间的差异.

本文中,我们提出了一种基于加权 Schatten p 范数最小化^[12](Weighted Schatten p-Norm Minimization, WS-NM)的磁共振图像重构算法.相比于 WNNM,WSNM 不仅可以更好地逼近原始低秩假设,而且还考虑了不同秩元素的重要性,因此作为图像的低秩约束,大大提高重构质量,此外交替方向乘子算法^[13](Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)来求解相关的非凸最小化问题.本文使用真实的全采样下的磁共振图像来验证所提出方法的性能.

2 基于加权 Schatten p 范数最小化的磁共振图像重构算法

2.1 加权 Schatten p 范数最小化

我们先简短的介绍非局部自相似性,以便能更好地理解在图像处理中,借助非局部相似块而形成的矩阵的低秩特性.图像 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\sqrt{N} \times \sqrt{N}}$ 被分割成 n 个有重叠像素的图像块(patch) $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{\sqrt{d} \times \sqrt{d}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 给定一个参考图像块 \mathbf{x}_c , 我们从一个大小 $S \times S$ 的搜索框中寻找出 $m - 1$ 个最相似的块,那么包括参考块 \mathbf{x}_c 在内的 m 个图像块就构成了一个集合 \mathbf{S}_i . 通常情况下,为了减少计算量,欧式距离被用来评估图像块之间的相似程度,距离越短,两个图像块更相似.将 \mathbf{S}_i 中的每个图像块按列堆积成列向量,那么最终集合 \mathbf{S}_i 便形成一个大小为 $d \times m$ 矩阵 \mathbf{X}_i , 我们称 \mathbf{X}_i 为分组(Group). 由于矩阵 \mathbf{X}_i 的列向量之间自相似, \mathbf{X}_i 矩阵具有低秩性,因此 CS-MRI

便转换成求解以下优化问题

$$\min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{UF}\mathbf{X}\|_F^2 + \lambda \sum_{i=1}^L \text{Rank}(\mathbf{X}_i) \quad (2)$$

其中 L 是图像 \mathbf{X} 按照上述方法分组的数量. 求解表达式(2)中的秩函数是非凸的 NP 问题,因此核范数最小化(NNM)常常被用来代替秩函数最小化,作为凸松弛约束.

矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 的核范数定义成 $\|\mathbf{X}\|_* = \sum_i^{\min\{n,m\}} |\sigma_i(\mathbf{X})|$, 其中 $\sigma_i(\mathbf{X})$ 代表 \mathbf{X} 的第 i 个奇异值. 然而,NNM 往往过度收缩秩元素并且平等的对待每个秩元素,因此加权核范数(WNNM)被提出来赋予奇异值不同的权重,对其进行不同程度的收缩,使得更多有用的信息被保留.

结合 Schatten p 范数最小化^[14,15]和 WNNM 的加权性,提出了一种加权 Schatten p 范数最小化^[12](WS-NM),该方法不仅可以更好地逼近原始秩函数,而且还考虑了不同秩元素的重要性. 矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 的加权 Schatten p 范数定义如下:

$$\|\mathbf{X}\|_{w,s} = \left(\sum_i^{\min\{n,m\}} w_i \sigma_i(\mathbf{X})^p \right)^{\frac{1}{p}}, 0 < p \leq 1 \quad (3)$$

其中 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_{\min\{n,m\}}]$ 表示权重向量,那么加权 Schatten p 范数的 p 次方为

$$\|\mathbf{X}\|_{w,s}^p = \sum_i^{\min\{n,m\}} w_i \sigma_i(\mathbf{X})^p, 0 < p \leq 1 \quad (4)$$

结合加权 Schatten p 范数最小化的 CS-MRI 重构问题可表示为:

$$\min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{UF}\mathbf{X}\|_F^2 + \lambda \sum_{i=1}^L \|\mathbf{X}_i\|_{w,s}^p \quad (5)$$

2.2 基于 WSNM 的磁共振图像重构算法

交替方向乘子法^[13](ADMM)将用于求解基于 WSNM 算法的磁共振图像重构,其基本思想是利用目标函数的可分离性,将原问题分解为若干个极小化子问题,然后交替地进行求解.引入辅助变量 \mathbf{Z} , 构建约束 $\mathbf{X} = \mathbf{Z}$, 则表达式(5)等价于

$$\min_{\mathbf{X}, \mathbf{Z}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{UF}\mathbf{X}\|_F^2 + \lambda \sum_{i=1}^L \|\mathbf{Z}_i\|_{w,s}^p, \text{ s. t. } \mathbf{X} = \mathbf{Z} \quad (6)$$

等式(6)迭代地解决以下子问题:

$$\mathbf{X}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{UF}\mathbf{X}\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{Z}^t + \mathbf{C}^t\|_F^2 \quad (7)$$

$$\mathbf{Z}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} \frac{\rho}{2} \|\mathbf{X}^{t+1} - \mathbf{Z} + \mathbf{C}^t\|_F^2 + \lambda \sum_{i=1}^L \|\mathbf{Z}_i\|_{w,s}^p \quad (8)$$

$$\mathbf{C}^{t+1} = \mathbf{C}^t + (\mathbf{X}^{t+1} - \mathbf{Z}^{t+1}) \quad (9)$$

其中 \mathbf{C} 为对偶变量. 固定 \mathbf{Z}^t 和 \mathbf{C}^t , 式(7)具有封闭形式的解

$$\mathbf{X}^{t+1} = \mathbf{F}^* \left[(\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \rho \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{F} (\mathbf{F}^* \mathbf{U}^T \mathbf{Y} + \rho (\mathbf{Z}^t - \mathbf{C}^t))) \right] \quad (10)$$

其中 \mathbf{U}^T 是 \mathbf{U} 的转置矩阵, \mathbf{F}^* 代表着离散傅里叶反变换, \mathbf{I} 表示单位矩阵, $\mathbf{F}^* \mathbf{U}^T \mathbf{Y}$ 在磁共振图像重构中表示

零填充图像. 式(8)可以改写为

$$\mathbf{Z}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{R}\|_F^2 + \frac{\lambda}{\rho} \sum_{i=1}^L \|\mathbf{Z}_i\|_{w_i, s}^p \quad (11)$$

其中 $\mathbf{R} = \mathbf{X}^{t+1} + \mathbf{C}^t$, $\mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{d \times m}$ 是来自于 $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{\sqrt{N} \times \sqrt{N}}$ 的分组. 根据文献[7, 12], 当 N 足够大时, 存在以下等式:

$$\frac{1}{N} \|\mathbf{Z} - \mathbf{R}\|_F^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^L \|\mathbf{Z}_i - \mathbf{R}_i\|_F^2, K = d \times m \times L \quad (12)$$

最终等式(11)等价于

$$\arg \min_{\mathbf{Z}_i} \left(\sum_{i=1}^L \frac{1}{2} \|\mathbf{Z}_i - \mathbf{R}_i\|_F^2 + \tau \|\mathbf{Z}_i\|_{w_i, s}^p \right) \quad (13)$$

其中 $\tau = \frac{\lambda K}{\rho N}$.

文献[12]证明 WSNM 可以等价地转化为独立的非凸 l_p 范数子问题, 其全局最优解可以通过广义软阈值[16] (Generalized Soft-Thresholding, GST) 算法进行求解. 因此, 本文采用广义软阈值算法求解表达式(13), 分组 \mathbf{Z}_i 解为

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{U}_{R_i} \times \text{GST}(\sigma(\mathbf{R}_i), \tau w_i, p) \times \mathbf{V}_{R_i}^T \quad (14)$$

其中 $\mathbf{R}_i = \mathbf{U}_{R_i} \Sigma_{R_i} \mathbf{V}_{R_i}^T$, Σ_{R_i} 为对角线是 \mathbf{R}_i 奇异值的对角矩阵. 在本文中, 每个分组 \mathbf{Z}_i 的权重 w_i 被设置为

$$w_i = \frac{1}{|\sigma(\mathbf{R}_i)| + \varepsilon} \quad (15)$$

其中 ε 是一个小常数. 基于 WSNM 约束的磁共振快速图像重构算法如算法 1 所示.

算法 1 基于 WSNM 的磁共振图像重构算法

输入: $\mathbf{Z}^0, \mathbf{C}^0, \rho, \lambda, \varepsilon, T$
 for $t = 0$ to T , do
 通过式(10)求解 \mathbf{X}^{t+1}
 $\mathbf{R} = \mathbf{X}^{t+1} + \mathbf{C}^t$
 for each group \mathbf{R}_i
 通过式(14)求解 \mathbf{Z}_i
 end for
 求解 \mathbf{Z}^{t+1} 通过合并所有的分组 \mathbf{Z}_i
 通过式(9)求解 \mathbf{C}^{t+1}
end for
输出: \mathbf{X}

3 实验及结果分析

为了验证基于加权 Schatten p 范数最小化的磁共振图像重构方法 (WSNM-MRI) 的重构性能, 我们采用三张全采样的 MR 复值图像进行模拟实验, 如图 1(a) ~ (c) 所示, 它们分别是柠檬, 切片为 7 和 10 的 T2-weighted 大脑磁共振图像, 这些 MR 数据来自于文献[17~20]. 图 2(d) 和 (e) 分别是加速因子为 4 (相当于采样率为 25%) 的伪径向采样矩阵和笛卡尔采样矩阵, 它们被用来欠采样 K 空间上的数据.

我们选取 PBDW^[17], PANO^[18] 和 GBRWT^[19] 这三种磁共振图像重构算法, 与本文提出的方法进行重构性能比较. 实验中, 上述三种算法选择对应文献中最优参数设置. 本文算法的相关参数设置如下: 图像块大小为 6×6 , 搜索框大小为 20×20 , 一个分组中相似图像块数量为 40; 正则化参数 $\lambda = 1e-6$; $p = 0.7$, 算法 1 中最大的迭代次数 T 为 60, 初始 \mathbf{Z}^0 为零填充图像, \mathbf{C}^0 为零矩阵; 针对不同的采样模式, 我们设置不同的 ρ , 以便在更快的收敛速度下达到最好的重建效果. 伪径向采样模式下, $\rho = 0.005$; 笛卡尔采样模式下, $\rho = 0.0005$. 同时, 用峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)、结构相似度^[21] (Structural Similarity, SSIM) 作为客观评价指标衡量不同算法的重构效果. 两种客观评价指标的定义分别为:

$$\text{PSNR} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{255^2}{M \times N \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (y(i, j) - x(i, j))^2} \right) \quad (16)$$

$$\text{SSIM} = \frac{(2\mu_x \mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (17)$$

其中, y 为重构的图像, x 为全采样下的图像, M 与 N 表示图像的尺寸大小, μ_x 与 μ_y 分别为两幅图像的均值, σ_x^2 与 σ_y^2 分别为两幅图像的方差, σ_{xy} 为两幅图像的协方差, C_1 与 C_2 是用来维持稳定的常数.

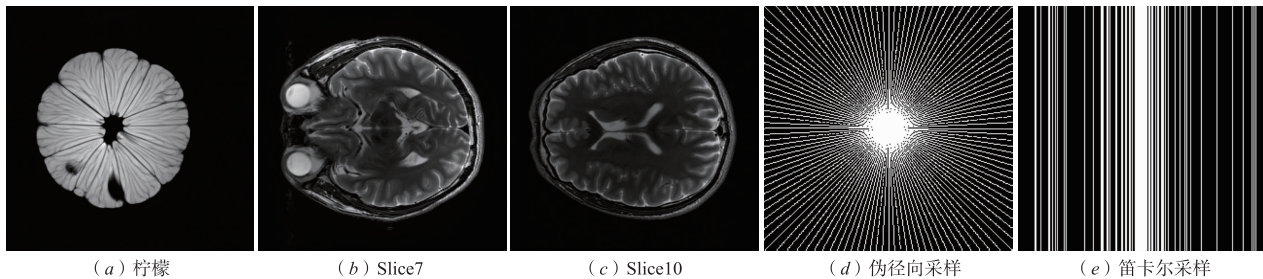


图1 测试数据及采样矩阵

3.1 基于 WSNM 的磁共振图像重构效果

图 2~4 分别展示了在欠采样 25% K 空间数据的条件下,不同算法重构三种磁共振图像的效果图.从局部放大图来看,基于 WSNM 的重构算法在图像质量和细节保留方面优于其它算法,具有最好的 PSNR.从重构误差放大图来看,基于 WSNM 的重构算法在减少伪影方面有明显的改善,更接近于全采样的磁共振图像.

表 1 记录了在伪径向欠采样和笛卡尔欠采样模式

下,利用不同算法重构磁共振图像的 PSNR 和 SSIM 值.在实验中,基于 NNM 和 WNNM 的重构算法也与基于 WSNM 的重构算法进行比较,其中这三种算法的参数都设置成一致,以便进行重构性能比较.从表 1 可以看出,在两种欠采样模式下,本论文提出的 WSNM-MRI 都具有更高的峰值信噪比和结构相似性,表明该方法具有更好地重构效果.

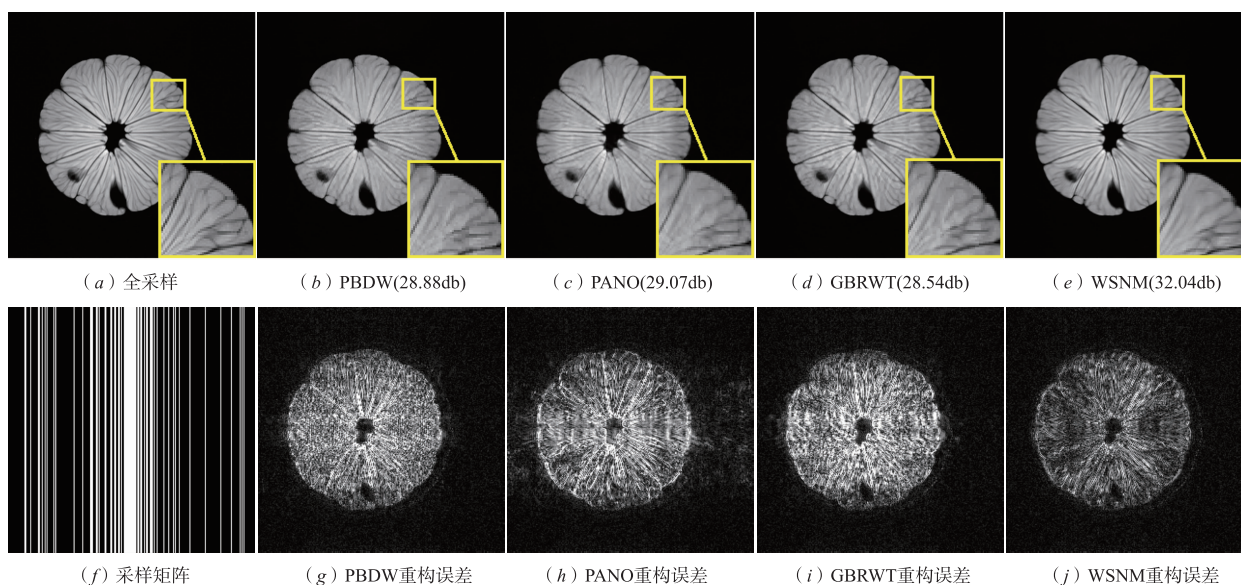


图2 不同算法下的柠檬重构图

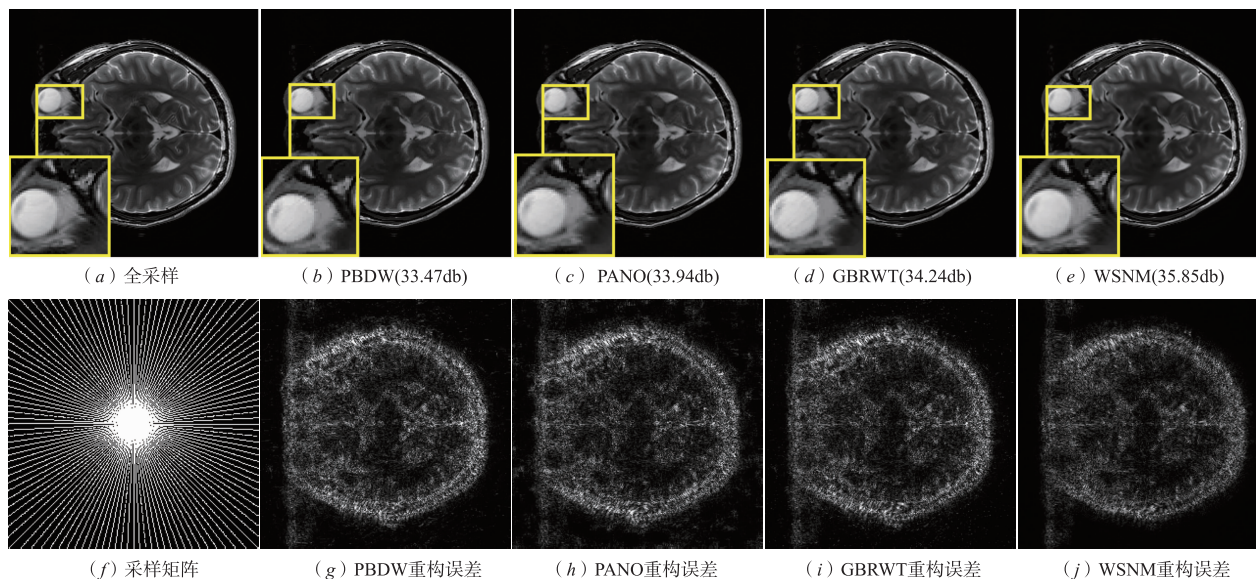


图3 不同算法下的Slice7重构图

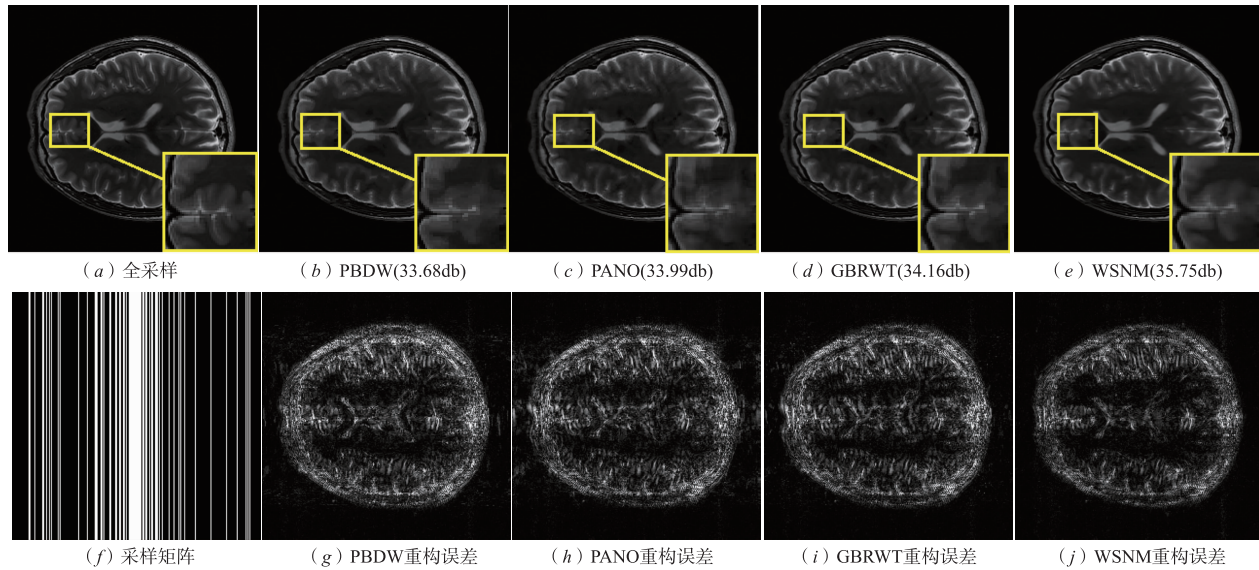


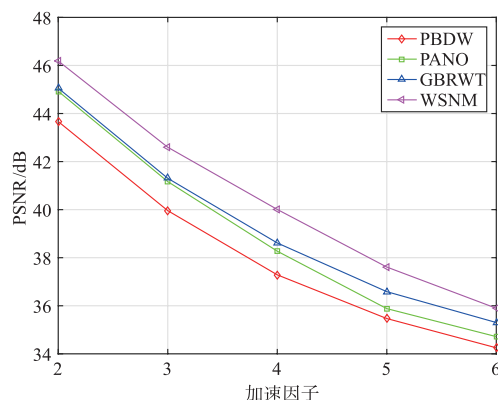
图4 不同算法下的Slice10重构图

表1 不同算法下的MRI重构质量(PSNR/SSIM)

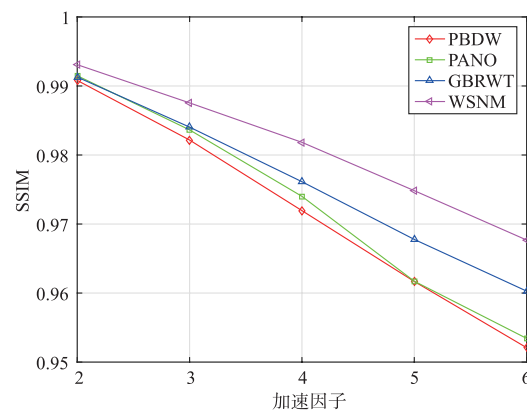
采样矩阵	算法	柠檬	Slice7	Slice10
伪径向采样	PBDW	31.51/0.9016	33.47/0.9499	37.25/0.9718
	PANO	32.89/0.9105	33.94/0.9394	38.22/0.9730
	GBRWT	32.48/0.8932	34.24/0.9559	38.45/0.9754
	NNM	32.17/0.9129	33.72/0.9549	38.31/0.9785
	WNNM	33.82/0.9162	35.68/0.9711	39.86/0.9814
	WSNM	34.08/0.9233	35.85/0.9714	40.08/0.9818
笛卡尔采样	PBDW	28.88/0.8830	30.38/0.9125	33.68/0.9443
	PANO	29.07/0.8873	30.61/0.9024	33.99/0.9359
	GBRWT	28.54/0.8741	30.67/0.9173	34.16/0.9476
	NNM	29.43/0.8972	30.40/0.9173	34.14/0.9562
	WNNM	31.58/0.9159	31.65/0.9372	35.46/0.9637
	WSNM	32.04/0.9162	31.81/0.9389	35.75/0.9642

3.2 不同加速因子下重构性能的比较

图5和图6分别表示在伪径向采样和笛卡尔采样模式下,PBDW,PANO,GBRWT和WSNM四种重构算法在不同的加速因子下的PSNR和SSIM.图1(c)的大脑磁共振图像作为实验对象.从图5和图6中可以看出,随着加速因子的增加,即K空间数据的减少,所有算法的重建质量下降,但是在任何采样模式、任何加速因子下,基于WSNM算法重构的磁共振图像都具有更高的PSNR和SSIM值,表明该方法在任何重构条件下具有适用性.从图5、图6的实验结果,可以发现重构算法在同样的采样率下,伪径向采样模式往往比笛卡尔采样重建效果更好.



(a) 伪径向采样下的图像重构PSNR



(b) 伪径向采样下的图像重构SSIM

图5 不同加速因子的伪径向采样下的图像重构质量

3.3 WSNM 算法的参数选择分析

基于WSNM的磁共振图像重建方法的性能取决于初始参数设置,在本章节中将讨论图像块(patch)大小

以及参数 ρ 的变化对图像重建质量的影响,其中,当讨论其中一个参数的时候,另外的参数都设置成上述实验中默认的,实验采用图1(b)作为测试对象.图7(a)

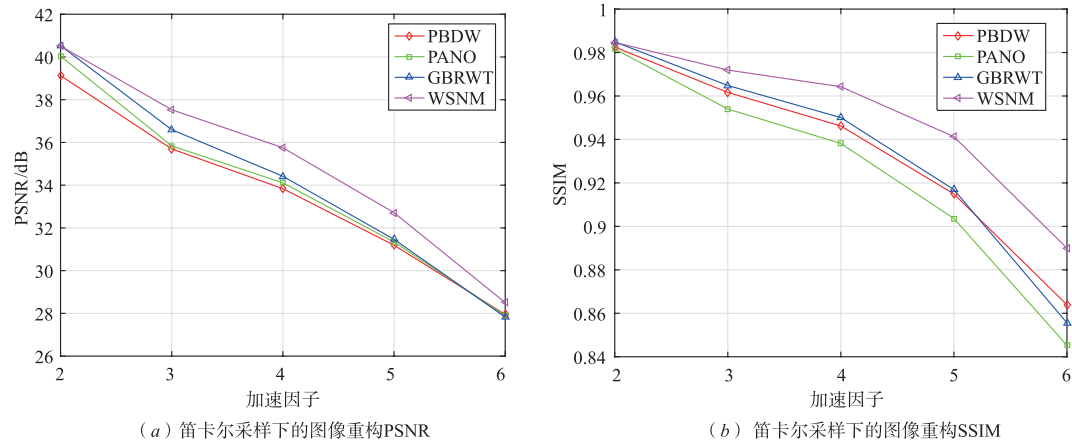


图6 不同加速因子的笛卡尔采样下的图像重构质量

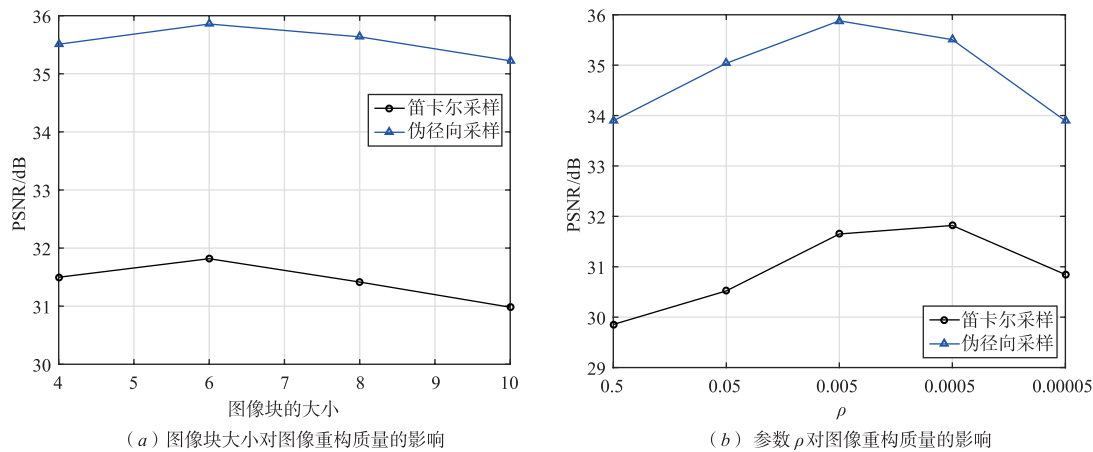


图7 不同参数对图像重构质量的影响

展示了图像块大小对图像重构质量的影响,我们发现所有采样模式下最优的图像块大小是 6×6 ,随着图像块越来越大,PSNR 逐渐减小.图 7(b)显示了参数 ρ 的变化对图像重构质量的影响,在不同的采样模式下,最优参数 ρ 并不相同.在笛卡尔采样模式下,当 $\rho = 0.0005$ 时,重构的磁共振图像 PSNR 最佳;而在伪径向采样模式下,当 $\rho = 0.005$ 时,重构的磁共振图像质量最好.因此,为了达到更好的重建效果,针对不同的采样模式,应分别设置最优参数 ρ .

4 结论

本论文提出了一种基于加权 Schatten p 范数最小化的磁共振图像重构方法,该算法结合了 Schatten p 范数和加权核范数最小化(WNNM),用作秩函数最小化方法,以便更加逼近低秩假设.同时,交替方向乘子算法(ADMM)被用来解决 CS-MRI 重建的相关最小化问题.实验结果表明,相比较于其它磁共振重构算法,本文算法可以有效地提高磁共振图像的精度和减少磁共振图像重构误差.在未来的工作中,我们将所提出的方

法应用于动态磁共振成像研究中.

参考文献

- [1] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [2] Lustig M, Donoho D L, Santos J M, et al. Compressed sensing MRI [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 72 - 82.
- [3] Do M N, Vetterli M. The contourlet transform; an efficient directional multiresolution image representation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(12): 2091 - 2106.
- [4] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311 - 4322.
- [5] Elad M, Aharon M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(12): 3736 - 3745.

- [6] Ravishankar S, Bresler Y. MR image reconstruction from highly undersampled k-space data by dictionary learning [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2011, 30(5): 1028 – 1041.
- [7] Zhang J, Zhao D, Gao W. Group-based sparse representation for image restoration[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2014, 23(8): 3336 – 3351.
- [8] Lu C, Tang J, Yan S, et al. Nonconvex nonsmooth low rank minimization via iteratively reweighted nuclear norm[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2016, 25(2): 829 – 839.
- [9] 宋云, 李雪玉, 沈燕飞, 杨高波. 基于非局部相似块低秩的压缩感知图像重建算法[J]. *电子学报*, 2017, 45(3): 695 – 703.
SONG Yun, LI Xue-yu, SHEN Yan-fei, YANG Gao-bo. Compressed sensing image reconstruction based on low rank of non-local similar patches[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2017, 45(3): 695 – 703. (in Chinese)
- [10] Huang Y M, Yan H Y, Wen Y W, et al. Rank minimization with applications to image noise removal[J]. *Information Sciences*, 2018, 429: 147 – 163.
- [11] Gu S, Zhang L, Zuo W, et al. Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising [A]. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*[C]. USA:IEEE, 2014. 2862 – 2869.
- [12] Xie Y, Gu S, Liu Y, et al. Weighted Schatten p-norm minimization for image denoising and background subtraction [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2016, 25(10): 4842 – 4857.
- [13] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers [J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1 – 122.
- [14] Liu L, Huang W, Chen D R. Exact minimum rank approximation via Schatten p-norm minimization[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 267: 218 – 227.
- [15] Shi X, Nie F, Lai Z, et al. Robust principal component analysis via optimal mean by joint l_2, l_1 and Schatten p-norms minimization[J]. *Neurocomputing*, 2018, 283: 205 – 213.
- [16] Zuo W, Meng D, Zhang L, et al. A generalized iterated shrinkage algorithm for non-convex sparse coding [A]. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*[C]. USA:IEEE, 2013. 217 – 224.
- [17] Qu X, Guo D, Ning B, et al. Undersampled MRI reconstruction with patch-based directional wavelets[J]. *Magnetic Resonance Imaging*, 2012, 30(7): 964 – 977.
- [18] Qu X, Hou Y, Lam F, et al. Magnetic resonance image reconstruction from undersampled measurements using a patch-based nonlocal operator[J]. *Medical Image Analysis*, 2014, 18(6): 843 – 856.
- [19] Lai Z, Qu X, Liu Y, et al. Image reconstruction of compressed sensing MRI using graph-based redundant wavelet transform [J]. *Medical Image Analysis*, 2016, 27: 93 – 104.
- [20] Liu Y, Zhan Z, Cai J F, et al. Projected iterative soft-thresholding algorithm for tight frames in compressed sensing magnetic resonance imaging [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2016, 35(9): 2130 – 2140.
- [21] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(4): 600 – 612.

作者简介



蒋明峰 男, 1977 年生于江西丰城, 现为浙江理工大学信息学院教授、硕士生导师, 主要研究方向为计算机医学图像处理、生物医学信号处理。
E-mail: m. jiang@zstu. edu. cn



陆亮 男, 1990 年生于江苏南通, 现为浙江理工大学信息学院硕士研究生, 主要研究方向为医学图像处理。
E-mail: lianglu118@126. com